Sucesiones y series de funciones

1. Estudiar la convergencia puntual de $\{f_n\}$, así como la convergencia uniforme en los intervalos $J \subseteq I$ que se indican en cada caso.

   a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = n(\cos x)^n \operatorname{sen} x$, $J = [0,a]$, $J = [a, \frac{\pi}{2}]$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

   b) $f_n :]0,\pi[\to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2(nx)}{n \operatorname{sen} x}$, $J =]0,a]$, $J = [a,\pi[$, $J = [a,b]$, $0 < a < b < \pi$.

2. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la sucesión de funciones dada por $f_n(x) = n^{\alpha} x (1-x^2)^n$.

   a) ¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[0,1]$?

   b) ¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[\rho,1]$, donde $0 < \rho < 1$?

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n(x) = \dfrac{x}{n^a(1+nx^2)}$ $(x \in \mathbb{R}_o^+)$. Probar que la serie $\sum f_n$:

   a) Converge puntualmente en $\mathbb{R}_o^+$ si $a > 0$, y la convergencia es uniforme en semirrectas cerradas que no contienen al cero.

   b) Converge uniformemente en $\mathbb{R}_o^+$ si $a > 1/2$.

4. Sea $b > 0$. Demuéstrese que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+nb} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^b}\, dt$$

   Aplicación: Calcúlese $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

5. Calcular el radio de convergencia y la suma de las series:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n^3+n+3}{n+1} x^n; \quad \sum_{n \geq 0} \frac{n^3}{n!} x^n; \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{1+2+\cdots+n} x^n$$

6. (i) Estúdiese para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ la integral $I(\alpha, p) = \displaystyle\int_0^1 x^{\alpha} (\log x)^2 dx$ existe y calcúlese su valor (intégrese por partes).

   (ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función dada por $f_n(x) = x^n (\log x)^2$, y $f_n(0) = 0$. Estúdiese si la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en $[0,1]$ y dedúzcase que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x(\log x)^2}{1-x} dx = 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

7. Calcúlese la suma de las series:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(2n+1)} \quad \text{y} \quad \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n(2n+1)}$$

   Sugerencia: Hacer uso de los desarrollos en serie de potencias centrada en cero de la función $\log\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)$.